$p \Rightarrow q \Leftrightarrow \sim q \Rightarrow \sim p$ αντιθετοαντιστροφή

$p \Rightarrow q \Leftrightarrow \sim (p \wedge \sim q)$ ως άτοπον απαγωγή

ΑΠΟΔΕΙΞΕΙΣ $(p_1 \wedge p_2 \wedge p_3 \wedge \dots \wedge p_\nu) \Rightarrow q$

$$\left.\begin{array}{l} p \Rightarrow q \\ q \Rightarrow r \end{array}\right\} \Rightarrow p \Rightarrow r$$

$\Rightarrow$

p	q	r	$p \Rightarrow q$	$q \Rightarrow r$	$(p \Rightarrow q) \wedge (q \Rightarrow r)$	$p \Rightarrow r$	
A	A	A	A	A	A	A	A
A	A	Ψ	A	Ψ	Ψ	Ψ	A
A	Ψ	A	Ψ	A	Ψ	A	A
A	Ψ	Ψ	Ψ	A	Ψ	Ψ	A
Ψ	A	A	A	A	A	A	A
Ψ	A	Ψ	A	Ψ	Ψ	A	A
Ψ	Ψ	A	A	A	A	A	A
Ψ	Ψ	Ψ	A	A	A	A	A

ΣΥΝΟΛΑ: Συλλογή αντικειμένων (στοιχείων)

Κενό σύνολο → $\emptyset$, $\{ \ \}$

ΟΡΙΣΜΟΣ (A,B σύνολα)
Το A είναι υποσύνολο του B. ($A \subseteq B$):

$\forall x \in A \Rightarrow x \in B$

ή B υπερσύνολο του A ($B \supseteq A$)

ΟΡΙΣΜΟΣ Δύο σύνολα λέγονται ίσα ($A = B$) αν και [illegible]
αν $A = B \rightarrow (A \subseteq B) \wedge (B \subseteq A)$

ΟΡΙΣΜΟΣ A γνήσιο υποσύνολο του B αν:
$A \subseteq B \wedge A \neq B$

Αν A σύνολο τότε:
ΣΥΜΒΑΣΗ: $\emptyset \subseteq A$

Παραδείγματα: $A = \{2, 4, 6\} \subseteq B = \{1, 2, 3, 4, 5, 6$

γνήσ
υποσ

Απόδειξη $\forall x \in A \Rightarrow x \in B$

αλλά $B \not\subseteq A$

γιατί $7 \in B \wedge 7 \notin A$

$\overbrace{}^{?} \Rightarrow \overbrace{}^{q}$

ΑΣΚ 13 / 20 "Αν ο Α πέρασε το μάθημα, τότε πέρασε και ο Β και δεν είναι σωστό ότι, αν ο Γ πέρασε το μάθημα τότε το πέρασε και ο Β."

$$(p \Rightarrow q) \wedge \sim (r \Rightarrow q)$$

p	q	r	$p \Rightarrow q$	$r \Rightarrow q$

ΠΡΟΤΑΣΙΑΚΟΣ ΤΥΠΟΣ έκφραση με μεταβλητή(ές) x που για κάθε "επιτρεπτή" τιμή της x μας δίνει μια λογική πρόταση

Παράδειγμα. Ο x είναι άρτιος $x \in \{1, 2, \ldots 7\}$

$P(x)$ // $P(1)$, $P(2)$, $P(7)$

$A = \{1, 2, 3, 4, 5\}$

$P(x)$: ο x είναι άρτιος

$(\forall x \in A)\, P(x) \rightarrow$ Ψ

$(\exists x \in A)\, P(x) \rightarrow$ A

$\sim (\forall x \in A) P(x) \Leftrightarrow (\exists x) \sim P(x)$

$\sim (\exists x) P(x) \Leftrightarrow (\forall x) \sim P(x)$

$(\forall x)(\forall y) P(x,y) \Leftrightarrow (\forall y)(\forall x) P(y,x)$

$\sim (\forall x)(\exists y) P(x,y) \Leftrightarrow (\exists x)(\forall y) \sim P(x,y)$

$\sim (\forall x)\underbrace{\boxed{(\exists y) P(x,y)}}_{Q(x)} \Leftrightarrow (\exists x) \sim Q(x)$

$\Leftrightarrow (\exists x)(\forall y) \sim P(x)$

ΠΡΑΞΕΙΣ ΣΥΝΟΛΩΝ: A, B

ΟΡΙΣΜΟΣ Τομή: $A \cap B = \{ x : x \in A \wedge x \in B \}$

ΠΡΟΤΑΣΗ: (Ιδιότητες τομής)

i) $A \cap A = A$

ii) $A \cap B = B \cap A$

iii) $A \cap (B \cap \Gamma) = (A \cap B) \cap \Gamma$

iv) $A \cap B \subseteq A, B$

Απόδειξεις: (ii) $x \in A \cap B \Leftrightarrow x \in A \wedge x \in B$

$\Leftrightarrow x \in B \wedge x \in A \Leftrightarrow x \in B \cap A$

$\left(\begin{array}{l} \Rightarrow A \cap B \subseteq B \cap A \\ \Leftarrow B \cap A \subseteq A \cap B \end{array} \right)$

iii) $[p \wedge (q \wedge r)] \Leftrightarrow [(p \wedge q) \wedge r]$

$x \in A \cap (B \cap \Gamma) \Leftrightarrow (x \in A) \wedge (x \in B \cap \Gamma) \Leftrightarrow (x \in A) \wedge (x \in B \wedge x \in \Gamma$

$(x \in A \wedge x \in B) \wedge (x \in \Gamma \Leftrightarrow x \in A \cap B \wedge x \in \Gamma \Leftrightarrow x \in A \cap B \cap \Gamma$

Αν $A \cap B = \emptyset$ τα A, B ξένα

ΟΡΙΣΜΟΣ: Ένωση $A \cup B = \{x \cdot x \in A \vee x \in B\}$

ΠΡΟΤΑΣΗ (Ιδιότητες ένωσης)

i) $A \cup A = A$

ii) $A \cup B = B \cup A$

iii) $A \cup (B \cup \Gamma) = (A \cup B) \cup \Gamma$

iv) $A, B \subseteq A \cap B$

$x \in B$

ΑΠΟΔ: $p \vee p \Rightarrow p$ // $p \vee q \Leftrightarrow q \vee p$

$$p \vee (q \vee r) \Leftrightarrow (p \vee q) \vee r$$

$$x \in A \cup A \Leftrightarrow x \in A \vee x \in A \Leftrightarrow x \in A$$

⋮

$$\sim(p \wedge q) \Leftrightarrow (\sim p) \vee (\sim q)$$

$\sim(x \in A \cap B)$

$\downarrow$

$x \notin A \cap B$

$x \notin (A \cap B) \Leftrightarrow (x \notin A) \vee (x \notin B)$

ΠΡΟΤΑΣΗ: i) $x \notin A \cap B \Rightarrow x \notin A \vee x \notin B$

ii) $x \notin A \cup B \Leftrightarrow x \notin A \wedge x \notin B$

$$(\sim p \vee q) \Leftrightarrow (\sim p) \wedge (\sim q)$$

<u>ΟΡΙΣΜΟΣ</u> $A - B$ (διαφορά) $\equiv \{x : x \in A \land x \notin B\}$

<u>ΠΡΟΤΑΣΗ</u> i) $A - B \subseteq A$

ii) $A - A = \emptyset$

iii) $\emptyset - A = \emptyset$

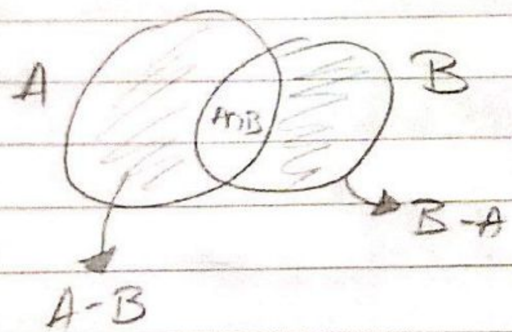
iv) $A - \emptyset = A$

<u>ΑΠΟΔ</u> i) $x \in A - B \Leftrightarrow x \in A \land x \notin B$

$(p \land q \Rightarrow q$

$\Rightarrow x \in A$

άρα $A - B \subseteq A$



$A \dotplus B \Leftrightarrow (A - B) \cup (B - A)$ (Συμμετρική διαφορά)

<u>ΙΔΙΟΤΗΤΕΣ ΠΡΑΞΕΩΝ</u>

$$A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$$

$$A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$$

Απόδειξη: Βγαίνει από $p \land (q \lor r) \Leftrightarrow (p \land q) \lor (p \land r)$

$x \in A \cap (B \cup C) \Rightarrow x \in A \land x \in B \cup C \Rightarrow x \in A \land (x \in B \lor x \in C)$

$\Rightarrow (x \in A \land x \in B) \lor (x \in A \land x \in C)$

$p \land (q \lor r) \Leftrightarrow (p \land q) \lor (q \land r)$

$\Rightarrow (x \in A \cap B) \vee (x \in A \cap C) \Rightarrow x \in (A \cap B) \cup (A \cap C)$

Άρα $A \cap (B \cup C) \subseteq (A \cap B) \cup (A \cap C)$

$x \in (A \cap B) \cup (A \cap C) \Rightarrow (x \in A \cap B) \vee (x \in A \cap C) \Rightarrow \ldots$

Άρα $(A \cap B) \cup (A \cap C) \subseteq A \cap (B \cup C)$

Συνεπώς $A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$

<u>ΆΣΚΗΣΗ</u>: i) $A \subseteq B \Leftrightarrow A - B = \emptyset$

ii) $A - B \Leftrightarrow A - (A \cap B)$

iii) $A \cap (B - \Gamma) = (A \cap B) - (A \cap \Gamma)$

iv) $A \cup (B - A) = A \cup B$